Οι απαντήσεις στο γνωστικό αντικείμενο του κλάδου ΠΕ03 (Μαθηματικών) - Επιμέλεια: Γιάννης Μοσχονάς

Ερώτημα 1ο:

α) Θεωρία σχολικού βιβλίου

β) Η Α΄Α είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A'}$ επομένως και της γωνίας $\widehat{A}$. Όμοια η Β΄Β είναι διχοτόμος των γωνιών $\widehat{B'}$ και $\widehat{B}$ και η Γ΄Γ είναι διχοτόμος των γωνιών $\widehat{\Gamma'}$ και $\widehat{\Gamma}$. Άρα τα τρίγωνα έχουν το ίδιο έκκεντρο. Αν είναι ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒΓ και ρ΄η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄. Τότε θα ισχύει:

$$\rho' - \rho = \delta \;\Rightarrow\; \frac{2E'}{\Pi'} - \frac{2E}{\Pi} = \delta \quad \Leftrightarrow 2\,\frac{E'}{\Pi'} = \frac{2E + \delta\cdot\Pi}{\Pi} \quad (1)$$

Επίσης έχουμε $$\frac{E'}{E} = \frac{\Pi'^2}{\Pi^2} \quad (2)$$

Από το σύστημα των (1) και (2) παίρνουμε: $$\Pi' = \frac{2E + \delta\cdot\Pi}{2E}\Pi$$

και $$E' = \frac{(2E + \delta\cdot\Pi)^2}{4E}$$

γ) **(i)** Είναι $f'(x) = f(x) \;\Rightarrow\; \left(\frac{f(x)}{e^x}\right)' = 0$

άρα υπάρχει σταθερά $c \in \Re$ τέτοια ώστε να ισχύει $f(x) = c\,e^x$

(ii) Είναι $2x\,h(x) = (x^2+1)\,h(x) - (x^2+1)\,h'(x) + 1 \;\Leftrightarrow$
$2x\,h(x) + (x^2+1)\,h'(x) = (x^2+1)\,h(x) + 1 \quad (1)$

Θεωρούμε $g(x) = (x^2+1)\,h(x) + 1 \;\Rightarrow$
$g'(x) = 2x\,h(x) + (x^2+1)\,h'(x)$

Από την (1) παίρνουμε :

$g'(x) = g(x) \;\Rightarrow\; g(x) = c\,e^x$ όπου c σταθερά.

Άρα $(x^2+1)\,h(x) + 1 = c\,e^x$

Αν $x=0$ τότε $c=1$

Έτσι θα έχουμε:

$$(x^2+1)\,h(x) + 1 = e^x \quad\Leftrightarrow\quad h(x) = \frac{e^x - 1}{x^2+1}$$

Ερώτημα 2ο:

α) Θεωρία από σχολικό βιβλίο (θεώρημα Fermat)

β) (i) $\hat{\beta} = 1{,}115$ $\quad \bar{x} = 47{,}5$ $\quad \bar{y} = 136$ $\quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{\beta}\,\bar{x} = 83{,}03$

άρα $\hat{y} = 83{,}03 + 1{,}115\,x$

(ii) $\hat{y} = 83{,}03 + 1{,}115 * 80 = 172{,}123$ mm Hg

γ) $\begin{bmatrix} 2 & k \\ -k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ Άρα θα ισχύει:

$(2-\lambda)\,x + ky = 0$

$-kx + (1-\lambda)\,y = 0$

Αφού το διάνυσμα είναι μη μηδενικό θα έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & k \\ -k & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 + \kappa^2 = 0$$

Το τριώνυμο πρέπει να έχει διακρίνουσα $\Delta \geq 0$, Έτσι θα έχουμε:

$\Delta = 1 - 4\kappa^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |k| \leq \frac{1}{2}$ με κ ακέραιο. Άρα κ=0.

Ερωτήματα 3ο και 4ο:

Απαντήσεις

1. γ
2. β
3. γ
4. α
5. δ
6. γ
7. β
8. γ
9. β
10. γ
11. α
12. β