

1) Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $AG=20$ και $B\Gamma=25$ και το ύψος AD . Να υπολογιστούν τα μήκη των τμημάτων $\Delta\Gamma$, ΔB , AB και AD .

2) Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\alpha=7$, $\beta=5$ και $\gamma=4\sqrt{2}$. Να βρεθεί:

α) Το είδος του τριγώνου.

β) Η προβολή της AB πάνω στη $B\Gamma$.

γ) Το ύψος AD και η γωνία \hat{B} .

3) Αν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\hat{A} = 150^\circ$ τότε αποδείξτε ότι ισχύει

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta \cdot \gamma \cdot \sqrt{3}.$$

4) Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha \cdot \mu_\alpha$. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 90^\circ$.

5) Δίνεται το ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB//\Gamma\Delta$). Αποδείξτε ότι:

$$\Delta B^2 - B\Gamma^2 = AB \cdot \Gamma\Delta$$

6) Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου $AB\Gamma$

είναι: $\alpha = x^2 + x + 1$, $\beta = 2x + 1$, $\gamma = x^2 - 1$. Να βρείτε

α) Τη μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου.

β) Τη γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά.

7) Ένα ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με ακτίνα R . Αν M είναι ένα τυχαίο σημείο του κύκλου, να αποδείξετε ότι: $MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 + M\Delta^2 = 8R^2$.

8) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2$. Η διάμεσος AM τέμνει τον

περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου στο σημείο Δ . Να αποδειχθεί ότι: α) $AM = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$

και β) $M\Delta = \frac{\alpha\sqrt{3}}{6}$.

9) Σε ένα οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τη διάμεσό του AM και το ύψος του BD . Να αποδειχθεί ότι: $AM^2 - MB^2 = AD \cdot A\Gamma$.

10) Δίνεται κύκλος $(O,8)$ και σημείο A εξωτερικό του κύκλου. Αν $AB\Gamma$ είναι τέμνουσα του κύκλου, τέτοια ώστε $AB=8$ και $B\Gamma=2$

α) Να βρείτε τη δύναμη του σημείου A ως προς τον κύκλο $(O,8)$.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AO\Gamma$.

γ) Να βρείτε το $\sin \hat{OAB}$.

- 1) Ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με διάμεσο AM έχει $AB=6$ και $A\Gamma=8$.
Να υπολογιστεί ο λόγος $\frac{E_1}{E_2}$ όπου E_1, E_2 τα εμβαδά των εγγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων MAB και MAG αντίστοιχα.
- 2) Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ εγγράψιμο σε κύκλο με $AB=\alpha$, $B\Gamma=\beta$, $\Gamma\Delta=\gamma$, $A\Delta=\delta$.
Να δείξετε ότι : $\frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\alpha\beta + \gamma\delta} = \frac{\eta\mu B}{\eta\mu A}$.
- 3) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $AB=6\sqrt{2}$, $A\Gamma=3$. Αν $A\Delta \perp B\Gamma$ και $\Delta E \perp A\Gamma$ τότε :
α) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου $\Gamma\Delta E$.
β) Να δείξετε ότι $\Delta B \cdot \Delta\Gamma = A\Gamma \cdot A E$.
- 4) Δίνεται εγγράψιμο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, ώστε οι πλευρές του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ με τη σειρά που δίνονται να αποτελούν γεωμετρική πρόοδο. Να αποδείξετε ότι η διαγώνιός του ΔB , το χωρίζει σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα. Βρείτε το είδος του τετραπλεύρου.
- 5) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 60^\circ$ και $\beta + \gamma = 2$. Αν $A\Delta$ η διχοτόμος του και $\Delta E \perp AB$ να δείξετε ότι :
i) $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} A\Delta$. ii) $A\Delta = \frac{\beta\gamma\sqrt{3}}{2}$. iii) $\frac{(A\Delta E)}{(A\Gamma\Delta)} = \frac{3\gamma}{4}$.
- 6) Από σημείο A εκτός κύκλου (O, R) με $OA=2R$ φέρνουμε τις εφαπτόμενες AB και $A\Gamma$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$.
- 7) Έστω κανονικό 9-γωνο και κανονικό 7-γωνο εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο (O, R) . Να αποδείξετε ότι : $2 \frac{\alpha_9 - \alpha_7}{\lambda_7 - \lambda_9} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda_7 + \lambda_9}{\alpha_9 + \alpha_7}$.
- 8) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) . Οι πλευρές AB και $A\Gamma$ του τριγώνου είναι ίσες με τις πλευρές του εγγεγραμμένου τετραγώνου και του εγγεγραμμένου ισοπλεύρου τριγώνου, αντίστοιχα, στον κύκλο αυτό.
Να υπολογιστούν : α) Οι γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$. β) Το ύψος u_α του τριγώνου. γ) Οι πλευρές του τριγώνου. δ) Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
- 9) Δυο χορδές AE και $B\Delta$ ενός κύκλου (O, R) τέμνονται στο σημείο Γ , έτσι ώστε να ισχύει: $\Gamma E = \lambda_4$, και $\Gamma\Delta = \lambda_6$. Να βρείτε το λόγο $\frac{(\Gamma B E)}{(A\Gamma\Delta)}$.
- 10) Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνονται $\hat{A} = 105^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$ και το ύψος $A\Delta = \lambda$. Με κέντρα τις κορυφές B, Γ και ακτίνες $BA, \Gamma A$ αντίστοιχα, γράφουμε τόξα $\hat{A}Z, \hat{A}H$ εντός του τριγώνου. Να υπολογίσετε τα εμβαδά των τριών χωρίων στα οποία χωρίζουν το τρίγωνο τα τόξα αυτά.