# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
## ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

## ΘΕΜΑ 1

**Α)** Θεώρημα σελ. 251

**Β)** Ορισμός σελ. 213

**Γ)** **α)** Σωστό

**β)** Σωστό

**γ)** Λάθος

**δ)** Λάθος

**ε)** Λάθος

## ΘΕΜΑ 2

**Α) α)** Έστω $x = 2\lambda + 1$, $y = 2\lambda - 1 \ \forall \lambda \varepsilon R$

$\lambda = \dfrac{x-1}{2}$ Άρα $y = 2\dfrac{x-1}{2} - 1 \Leftrightarrow y = x - 2$

**β)** Η κάθετη στην $y = x - 2$ που πέρνα από το Ο(0,0) είναι $y = \lambda \cdot x$ με λ = -1

Άρα $y = -1 \cdot x$

Όποτε : $\begin{matrix} y = -1x \\ y = x - 2 \end{matrix}$ $x - 2 = -x \Leftrightarrow x = 1$ και $y = -1$

Επομένως $Z_0 = 1 - i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο.

**Β)** Έστω ότι $w = x + y \cdot i$ τότε : $|W|^2 + \overline{W} - 12 = 1 - i \Leftrightarrow$

$$x^2 + y^2 + x - y \cdot i - 12 = 1 - i$$

Συνεπώς $\begin{cases} x^2 + y^2 - x - 12 = 1 \\ -y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 - x - 12 = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = -3 \\ \acute{\eta} \\ \chi = 4 \end{matrix}$

Άρα $w_1 = -3 + i$ $w_2 = 4 + i$

## ΘΕΜΑ 3

**Α)** Έχουμε $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$

Άρα η $f$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$ το $f(0) = 1$

Επειδή επιπλέον η $f$ είναι παραγωγίσιμη με : $f'(x) = a^x \cdot \ln a - \dfrac{1}{x+1}$ τότε σύμφωνα με το Θ. Fermat :

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow a^0 \ln a - \frac{1}{0+1} = 0 \Leftrightarrow \ln a = 1 \Leftrightarrow a = e$$

**Β)** Για $a = e$ , $f(x) = e^x - \ln(x+1)$ , $x > -1$

**α)** $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x+1}$ , $f''(x) = e^x + \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$

Άρα η $f$ κυρτή στο $\Delta = (0, +\infty)$

**β)** Αφού $f$ κυρτή τότε η $f'\uparrow$ και αφού $f'(0) = 0$ τότε το 0 είναι μοναδική ρίζα της $f'$ και για το πρόσημο της $f'$ έχουμε :

- $x \varepsilon (-1, 0)$ με $x < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(0) = 0$

- $x \varepsilon (0,+\infty)$ με $x > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(0) = 0$

| X | -1 | | 0 | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | | + | |
| $f(x)$ | | $\downarrow$ | | $\uparrow$ | |

$f(0) = 1$

**Γ)** Έστω η εξίσωση : $\dfrac{f(\beta)-1}{x-1} + \dfrac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow$

$$(x-2)[f(\beta)-1] + (x-1)[f(\gamma)-1] = 0$$

Έστω τώρα η συνάρτηση $g(x) = (x-2)[f(\beta)-1] + (x-1)[f(\gamma)-1]$ στο $[1,2]$

- Η $g$ συνεχής στο $[1,2]$ ως πολυώνυμο
- $g(1) = -f(\beta) + 1 < 0$ διότι $f(\beta) > 1 \Leftrightarrow f(\beta) - 1 > 0, \beta \neq 0$
- $g(2) = f(\gamma) - 1 > 0$ διότι $f(\gamma) > 1$ με $\gamma \neq 0$

(αφού $f(0) = 1$ ολικό ελάχιστο της $f$ )

Άρα $g(1)g(2) < 0$ , επομένως από το Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \varepsilon (1,2)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$ δηλαδή $x_0$ ρίζα της εξίσωσης.

## ΘΕΜΑ 4

**α)** Η $G$ με τύπο $G(x) = \dfrac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3$ ως πράξεις συνεχών στο $(0,2]$

$H(x) = \int_0^x tf(t)dt$ συνεχής, αφού η $H(x)$ είναι παραγωγίσιμη, διότι $tf(t)$ συνεχής.

Ακόμη $\int_0^x f(t)dt$ συνεχής.

Στο $x_0 = 0$ έχουμε: $\lim_{x\to 0^+} G(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3\right) = L$

Αλλά $\lim_{x\to 0^+}\frac{H(x)}{x}$ έχει απροσδιόριστη μορφή τύπου $\frac{0}{0}$

Άρα από πρώτο κανόνα De L'hospital έχουμε :

$\lim_{x\to 0^+}\frac{(H(x))'}{(x)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\int_0^x tf(t)dt\right)}{1} = \lim_{x\to 0^+}(x\cdot f(x)) = 0\cdot f(0) = 0$ αφού $f$ συνεχής στο $x_0 = 0$

Άρα $\lim_{x\to 0^+}\frac{H(x)}{x} = 0$

Όποτε $L = \lim_{x\to 0}\frac{H(x)}{x} - \lim_{x\to 0}\int_0^x f(t)dt + 3 = 3$

Ακόμη $G(0) = 6\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2} = 6\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\left(1-\sqrt{1-t^2}\right)\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)}{\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)\cdot t^2}$

$= 6\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t^2\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)} = 6\cdot\frac{1}{1+\sqrt{1-0^2}} = 3$

Άρα $\lim_{x\to 0^+} G(x) = G(0)$, επομένως $G$ συνεχής στο $x_0 = 0$, άρα η $G$ συνεχής στο $[0,2]$

**β)** Η $G$ παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με παράγωγο : $G'(x) = \left(\frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3\right)' =$

$= \frac{H'(x)\cdot x - H(x)\cdot(x)'}{x^2} - f(x) = \frac{x^2 f(x) - H(x)}{x^2} = -\frac{H(x)}{x^2}$

**γ)** Έστω οτι δεν υπάρχει $a\varepsilon(0,2): H(a) = 0$ τότε $G'(x) = -\frac{H(x)}{x^2} \neq 0, \quad \forall x\varepsilon(0,2)$

Αφού $G'(x)$ συνεχής και δεν μηδενίζεται τότε διατηρεί πρόσημο. Άρα η $G$ γνησίως μονότομη στο $[0,2]$. Άρα η $G$ είναι «ένα προς ένα».

Όμως • $G(0)=3$

$$\bullet\ G(2)=\frac{H(2)}{2}-\int_0^2 f(t)dt+3 \Leftrightarrow$$

Και

$$G(2)=\frac{1}{2}\int_0^2 tf(t)dt-\int_0^2 f(t)dt+3=\frac{1}{2}\left(\int_0^2 (t-2)f(t)dt\right)+3=\frac{1}{2}\cdot 0+3$$

Άτοπο

**δ)** $G(x):[0,a]$

• Η $G(x)=\dfrac{H(x)}{x}-\displaystyle\int_0^x f(t)dt+3$ συνεχής στο $[0,a]$

• Η $G$ παραγωγίσιμη με $G'(x)=-\dfrac{H(x)}{x^2}$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \varepsilon (0,a)$ τέτοιο ώστε :

$$G'(\xi)=\frac{G(a)-G(0)}{a-0} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{H(\xi)}{\xi^2}=\frac{\frac{H(a)}{a}-\int_0^a f(t)dt+3-3}{a} \Leftrightarrow$$

$$a\int_0^{\xi} tf(t)dt=\xi^2\int_0^{\alpha} f(t)dt$$