ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Φυλλάδιο 14^{O} : Κεφ.3- Παρ.3.4,3.5, 3.7 – Ορισμένο Ολοκλήρωμα.

1) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int_1^2 x\sqrt{2-x}\,dx$, ii) $\int_0^5 \frac{1}{x^2-6x+9}dx$, iii) $\int_0^1 xe^{-2x}\,dx$,

iv) $\int_0^{\pi} x|\sigma\upsilon\nu x|\,dx$, v) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu 2x}{1+2\eta\mu x}dx$, vi) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\eta\mu x}{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}}dx$

vi) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}dx$, vii) $\int_{-1}^{10} \frac{x}{1+|x|}dx$.

2) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $x_0=\alpha$ σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\frac{\pi}{3}$ και στο σημείο με $x_1=\beta$ γωνία $\frac{\pi}{4}$.
Αν η συνάρτηση f'' είναι συνεχής στο [α , β] , να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f''(x)\,dx .$$

3) α) Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [α , β] , να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left[f(x)+f(\alpha+\beta-x)\right]dx$$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^e \frac{2004^x}{2004^x+2004^{1+e-x}}dx$.

4) Δίνεται η συνάρτηση $F(x)=\int_1^{2x}\sqrt{t-1}\;dt$.

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
Β) Να βρείτε την παράγωγό της.
Γ) Να μελετήσετε την F ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

5) Δίνεται η συνάρτηση g , η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση

$$f(x)=\int_0^x (x-t)\cdot g(t)\,dt$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη.

6) Αν είναι $g(x)=\int_1^x f\left(\frac{t}{x}\right)dt$ όπου f συνεχής συνάρτηση και το σημείο Α$(1,2004)\in C_f$ να βρείτε το $g'(1)$.

7) Αν είναι $g(x)=\int_1^x \sigma\upsilon\nu(\pi x t)\,dt$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο της $\Sigma\big(1,g(1)\big)$.

8) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$, να αποδείξετε ότι

$$\alpha\int_1^{\alpha}\frac{1}{x^2}\,f\left(\frac{\alpha}{x}\right)dx=\int_1^{\alpha} f(x)\,dx$$

9) Αν f είναι μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για τη συνάρτηση

$F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$ ισχύει $F(\alpha)=F(\beta)$ $\mu\varepsilon\ \ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \alpha<\beta$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α,β).

10) Αν για τις συναρτήσεις $f\ \kappa\alpha\iota\ g$ ισχύει η σχέση

$f'(x)=g'(x)+3x^2-7$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και οι γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων τέμνονται στο σημείο με τετμημένη 1, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των $f\ \kappa\alpha\iota\ g$.

11) Α) Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$x\cdot f(x)=\frac{1}{2}\ln x^2+2003+\int_1^x f(t)\,dt \quad \text{, για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

Β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f του ερωτήματος Α), τον άξονα χ΄χ και την ευθεία $x=1$.

12) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση g , τέτοια ώστε $g(x)=\int_\alpha^x (x-\beta)\,f(t)\,dt$.

Αν η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $\mathrm{A}\big(\beta,g(\beta)\big)$ είναι η ευθεία με εξίσωση $2004x+y-2003=0$.

Α) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες $x=\alpha\ \ \kappa\alpha\iota\ \ x=\beta$.

Β) Να βρείτε το σημείο $\mathrm{A}\big(\beta,g(\beta)\big)$.

Γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\int_\alpha^\xi f(t)\,dt=(\beta-\xi)\cdot f(\xi)$$